SOPRA

UNA EQUAZIONE DELL'8° GRADO

NOTA DEI DOTTORI

G. JUNG ed A. ARMENANTE

SOPRA UNA EQUAZIONE DELL' 8.° GRADO

NOTA DEI DOTTORI

G. JUNG ed A. ARMENANTE

(Milano)

Il Professore Brioschi in una sua nota presentata all' Istituto Lombardo il 23 Gennaio 1868 (Sopra le equazioni generali dell' ottavo grado che hanno lo stesso gruppo delle equazioni del moltiplicatore, corrispondente alla trasformazione di settimo ordine delle funzioni ellittiche) ha cercato la forma generale delle equazioni di 8° grado le cui radici z sono esprimibili per le

$$(1) \qquad \sqrt{z_\infty} = A_0\sqrt{-7} \qquad \sqrt{z_s} = A_0 + A_1\rho^s + A_2\rho^{4s} + A_3\rho^{2s} \qquad s = 0.1\ldots 6$$

dove ρ è una radice immaginaria di $\rho^7 = 1$.

Avendo noi verificato i risultati di questa nota ci è sembrato non del tutto inutile esporre il metodo seguito in questa verifica.

Sia

$$(2) \qquad z^8 + a_1 z^7 + a_2 z^6 + a_3 z^5 + a_4 z^4 + a_5 z^3 + a_6 z^2 + a_7 z + a_8 = 0$$

la equazione cercata, e rappresentisi con S_p la somma delle potenze p^{me} delle sue radici, cioè pongasi

$$(2)' \qquad S_p = (-7)^p A_0^{2p} + \sum_{s=0}^{s=6} (A_0 + A_1\rho^s + A_2\rho^{4s} + A_3\rho^{2s})^{2p}.$$

Derivando S_p 2 volte rispetto ad A_0 risulta

$$\frac{1}{2p(2p-1)}\frac{d^2S_p}{dA_0^2} = (-7)^p A_0^{2p-2} + \sum_{s=0}^{s=6} (A_0 + A_1\rho^s + A_2\rho^{4s} + A_3\rho^{2s})^{2p-2}$$

ossia

$$(3) \qquad \frac{1}{2p(2p-1)}\frac{d^2S_p}{dA_0^2} = -8(-7)^{p-1}A_0^{2p-2} + S_{p-1}:$$

relazione che mostra la legge con cui sono formate le S d' indice inferiore con quelle d'indice superiore.

In virtù di questa relazione e dalla proprietà che una delle radici della (2) è $-7A_0^2$ noi potremo ottenere i coefficienti della (2) mediante il calcolo diretto di a_8 ed S_8.

Passiamo ora a vedere come si calcola la S_6.

Evidentemente per la formola di una potenza di un polinomio si ha

$$S_p=(-7)^p A_0^{2p}+\sum_{s=0}^{s=6}\sum\frac{2p!}{\alpha!\,\beta!\,\gamma!\,\delta!}A_0^{\alpha}A_1^{\beta}A_2^{\gamma}A_3^{\delta}\rho^{s(\beta+4\gamma+2\delta)}$$

dove il secondo $\sum$ si estende a tutti i valori interi positivi di α, β, γ, δ pei quali

$$\alpha+\beta+\gamma+\delta=2p$$

restando s costante.

Se ora scambiamo le due sommatorie fra loro, ciò che equivale a fare variare prima s da 0 a 6 restando α, β, γ, δ costanti, e poi a prendere la somma dei termini simili ottenuti: allora la precedente diviene

$$S_p=(-7)^p A_0^{2p}+\sum\frac{2p!}{\alpha!\,\beta!\,\gamma!\,\delta!}A_0^{\alpha}A_1^{\beta}A_2^{\gamma}A_3^{\delta}.\sum_{s=0}^{s=6}\rho^{s(\beta+4\gamma+3\delta)}:$$

ma si ha per tutti i valori di β, γ, δ che non soddisfano la congruenza

$$\beta+4\gamma+3\delta\equiv 0 \quad \text{mod. } (7)$$

che il

$$\sum\rho^{s(\beta+4\gamma+3\delta)}=0\,;$$

e si ha che questa sommatoria è uguale a 7 per i valori di β, γ, δ che danno la congruenza precedente: quindi si avrà

$$S_p=(-7)^p A_0^{2p}+7\sum\frac{2p!}{\alpha!\,\beta!\,\gamma!\,\delta!}A_0^{\alpha}A_1^{\beta}A_2^{\gamma}A_3^{\delta}$$

dove il $\sum$ si estende ora alle sole partizioni

$$\alpha+\beta+\gamma+\delta=2p$$

che danno

$$\beta+4\gamma+3\delta\equiv 0 \quad \text{mod. } (7).$$

Nel caso di $p=6$ cioè nel calcolo di S_6 queste due condizioni vengono ad essere

$$\alpha+\beta+\gamma+\delta=12 \qquad \beta+4\gamma+3\delta\equiv 0 \quad \text{mod. } (7).$$

In virtù di queste la forma di S_6 ordinata rispetto ad A_0 è

$$\frac{1}{7}S_6=A_0^{12}k_0+A_0^{11}k_1+A_0^{10}k_2+A_0^{9}k_3+A_0^{8}k_4+A_0^{7}k_5+A_0^{6}k_6+A_0^{5}k_7+A_0^{4}k_8$$
$$+A_0^{3}k_9+A_0^{2}k_{10}+A_0k_{11}+k_{12}$$

dove si ha

$$k_0 = +16808 \quad \text{e}$$

$$k_s = \Sigma \frac{12!}{(12-s)!\,\beta!\gamma!\delta!} A_1^{\beta} A_2^{\gamma} A_3^{\delta}$$

e

$$\beta+\gamma+\delta = s \quad \beta+4\gamma+3\delta \equiv 0 \quad \text{mod. } (7).$$

Le soluzioni di queste relazioni da $s=3$ ad $s=12$ sono espresse dal quadro seguente mentre non esistono soluzioni per $s=1$ e $s=2$.

s	$\beta\ \gamma\ \delta$	s	$\beta\ \gamma\ \delta$	s	$\beta\ \gamma\ \delta$	s	$\beta\ \gamma\ \delta$	s	$\beta\ \gamma\ \delta$
0	0 0 0	7	4 2 1	9	3 3 3	11	8 0 3	12	7 2 3
3	1 1 1	.	1 4 2	10	8 1 1	.	7 3 1	.	3 7 2
4	3 1 0	.	2 1 4	.	1 8 1	.	1 7 3	.	2 3 7
.	0 3 1	8	6 2 0	.	1 1 8	.	3 1 7	.	5 1 6
.	1 0 3	.	0 6 2	.	6 0 4	.	2 4 5	.	6 5 1
5	3 0 2	.	2 0 6	.	4 6 0	.	5 2 4	.	1 6 5
.	2 3 0	.	3 4 1	.	0 4 6	.	4 5 2		
.	0 2 3	.	1 3 4	.	5 3 2	12	4 4 4		
6	1 5 0	.	4 1 3	.	2 5 3	.	10 0 2		
.	5 0 1	9	6 1 2	.	3 2 5	.	2 10 0		
.	0 1 5	.	2 6 1	.	10 1 0	.	0 2 10		
.	2 2 2	.	1 2 6	.	0 10 1	.	9 3 0		
7	0 7 0	.	4 0 5	.	1 0 10	.	0 9 3		
.	0 0 7	.	5 4 0	11	3 8 0	.	3 0 9		
.	7 0 0	.	0 5 4	.	0 3 8				

onde

$$k_1=0 \quad k_2=0 \quad k_3=10.11.12\, A_1A_2A_3. \quad k_4=2.9.10.11(A_2^3A_3+A_3^3A_1+A_1^3A_2)$$

$$k_5=8.9.10.11(A_2^2A_3^3+A_3^2A_1^3+A_1^2A_2^3) \quad k_6=8.7.9.11(A_1A_2^5+A_3A_1^5+A_2A_3^5)$$

$$+7.8.9.11.15\, A_1^2A_2^2A_3^2$$

$$k_7=8.9.11(A_1^7+A_2^7+A_3^7)+7.8.9.11.15\, A_1A_2A_3(A_2^3A_3+A_3^3A_1+A_1^3A_2)$$

$$k_8=2.7.9.10.11(A_2^6A_3^2+A_3^6A_1^2+A_1^6A_2^2)$$

$$+2.7.9.10.11.10\, A_1A_2A_3(A_2^2A_3^3+A_3^2A_1^3+A_1^2A_2^3)$$

$$k_9=4.7.9.10.11(A_2^5A_3^4+A_3^5A_1^4+A_1^5A_2^4)$$
$$+4.7.9.10.11.2A_1A_2A_3(A_2A_3^5+A_3A_1^5+A_1A_2^5)+4.7.3.10.11.10\,A_1^3A_2^3A_3^3$$
$$k_{10}=3.5.11.12.7(A_2^4A_3^6+A_3^4A_1^6+A_1^4A_2^6)+3.5.11.12.30A_1A_2A_3(A_1^7+A_2^7+A_3^7)$$
$$+3.5.11.12.42\,A_1^2A_2^2A_3^2(A_2^3A_3+A_3^3A_1+A_1^3A_2)$$
$$k_{11}=11.12(A_2^{10}A_3+A_3^{10}A_1+A_1^{10}A_2)+11.12.120A_1A_2A_3(A_2^6A_3^2+A_3^6A_1^2+A_1^6A_2^2)$$
$$+11.12.490A_1^2A_2^2A_3^2(A_2^2A_3^3+A_3^2A_1^3+A_1^2A_2^3)+11.12.15(A_2^3A_3^5+A_3^3A_1^5+A_1^3A_2^5).$$
$$k_{12}=2.11.10(A_2^9A_3^3+A_3^9A_1^3+A_1^9A_2^3)+2.11.3(A_2^2A_3^{10}+A_3^2A_1^{10}+A_1^2A_2^{10})$$
$$+7.8.9.11\,A_1A_2A_3(A_2^5A_3^4+A_3^5A_1^4+A_1^5A_2^4)$$
$$+8.9.10.11\,A_1^2A_2^2A_3^2(A_2A_3^5+A_3A_1^5+A_1A_2^5)+5.7.9.10.11\,A_1^4A_2^4A_3^4.$$

Se poniamo però, come nella nota citata

$$A_1A_2A_3=\alpha_0 \quad A_2^3A_3+A_3^3A_1+A_1^3A_2=\alpha_1 \quad A_2^2A_3^3+A_3^2A_1^3+A_1^2A_2^3=\alpha_2$$
$$A_2A_3^5+A_3A_1^5+A_1A_2^5=\alpha_3-\alpha_0^2 \quad A_1^7+A_2^7+A_3^7=\alpha_4-7\alpha_0\alpha_1$$

allora tra le α esistono le relazioni identiche

$$\alpha_1\alpha_3-\alpha_0\alpha_4=\alpha_2^2-7\alpha_0^2\alpha_1$$
$$\alpha_2\alpha_4-\alpha_3^2-\alpha_0^2\alpha_3=7\alpha_0^4+2\alpha_0\alpha_1\alpha_2+\alpha_1^3$$

e le k diventano

$$k_3=1320\alpha_0 \quad k_4=1980\alpha_1 \quad k_5=7920\alpha_2 \quad k_6=5544(\alpha_3+14\alpha_0^2) \quad k_7=792(\alpha_4+98\alpha_0\alpha_1)$$
$$k_8=13860(\alpha_1^2+8\alpha_0\alpha_2) \quad k_9=9240(3\alpha_0\alpha_3+3\alpha_1\alpha_2+28\alpha_0^3)$$
$$k_{10}=1980(3\alpha_0\alpha_4+7\alpha_2^2+49\alpha_0^2\alpha_1) \quad k_{11}=132(\alpha_1\alpha_4+14\alpha_2\alpha_3+98\alpha_0\alpha_1^2+392\alpha_2\alpha_0^2)$$
$$k_{12}=(16632\alpha_0^4+66\alpha_3^2+220\alpha_1^3+2376\alpha_0^2\alpha_3+4752\alpha_0\alpha_1\alpha_2).$$

Quindi si trova per S_6 il valore

$$S_6=154\{764A_0^{12}+60A_0^9\alpha_0+90A_0^8\alpha_1+360A_0^7\alpha_2+256A_0^6(\alpha_3+14\alpha_0^2)$$
$$+36A_0^5(\alpha_4+98\alpha_0\alpha_1)+630A_0^4(\alpha_1^2+8\alpha_0\alpha_2)+420A_0^3(3\alpha_1\alpha_2+3\alpha_0\alpha_3+28\alpha_0^3)$$
$$+90A_0^2(3\alpha_0\alpha_4+7\alpha_2^2+49\alpha_0^2\alpha_1)+6A_0(\alpha_1\alpha_4+14\alpha_2\alpha_3+98\alpha_0\alpha_1^2+392\alpha_2\alpha_0^2)$$
$$+(756\alpha_0^4+3\alpha_3^2+108\alpha_0^2\alpha_3+10\alpha_1^3+216\alpha_0\alpha_1\alpha_2)\}.$$

Derivando successivamente la S_6 e tenendo presente la (3) si hanno le

$$S_5=70\{-240A_0^{10}+72A_0^7\alpha_0+84A_0^6\alpha_1+252A_0^5\alpha_2+126A_0^4(\alpha_3+14\alpha_0^2)$$
$$+42A_0^3(\alpha_4+98\alpha_0\alpha_1)+126A_0^2(\alpha_1^2+8\alpha_0\alpha_2)+42A_0(3\alpha_0\alpha_3+3\alpha_1\alpha_2+28\alpha_0^3)$$
$$+3(\alpha_0\alpha_4+7\alpha_2^2+49\alpha_0^2\alpha_1)\}$$

$$S_4=28\{+86A_0^8+84A_0^5\alpha_0+70A_0^4\alpha_1+140A_0^3\alpha_2+42A_0^2(\alpha_3+14\alpha_0^2)$$
$$+2A_0(\alpha_4+98\alpha_0\alpha_1)+7(\alpha_1^2+8\alpha_0\alpha_2)\}$$
$$S_3=42\{-8A_0^6+20A_0^3\alpha_0+10A_0^2\alpha_1+10A_0\alpha_2+(\alpha_3+14\alpha_0^2)\}$$
$$S_2=28\{2A_0^4+6A_0\alpha_0+\alpha_1\} \quad S_1=0.$$

Con questi valori mediante le formole di Newton si ricava

$$a_1=0$$
$$a_2=-14\{2A_0^4+6A_0\alpha_0+\alpha_1\},\ a_3=14\{8A_0^6-20A_0^3\alpha_0-10A_0^2\alpha_1-10A_0\alpha_2-(\alpha_3+14\alpha_0^2)\}$$
$$a_4=-7\{30A_0^8-252A_0^5\alpha_0+14A_0^4\alpha_1+140A_0^3\alpha_2+42A_0^2(\alpha_3+2\alpha_0^2)+2A_0(\alpha_4+14\alpha_0\alpha_1)$$
$$+7(8\alpha_0\alpha_2-\alpha_1^2)\}$$
$$a_5=14\{16A_0^{10}-184A_0^7\alpha_0+84A_0^6\alpha_1+28A_0^5\alpha_2-14A_0^4(7\alpha_3-22\alpha_0^2)-4A_0^3(3\alpha_4+14\alpha_0\alpha_1)$$
$$+14A_0^2(\alpha_1^2-12\alpha_0\alpha_2)+14A_0(\alpha_1\alpha_2-3\alpha_0\alpha_3)+(\alpha_1\alpha_3-12\alpha_2^2-14\alpha_0^2\alpha_1)\}$$
$$a_6=-7\{20A_0^{12}-172A_0^9\alpha_0+190A_0^8\alpha_1-360A_0^7\alpha_2+28A_0^6(38\alpha_0^2-\alpha_3)$$
$$+4A_0^5(19\alpha_4-126\alpha_0\alpha_1)+14A_0^4(9\alpha_1^2-32\alpha_0\alpha_2)+28A_0^3(19\alpha_0\alpha_3-5\alpha_1\alpha_2)$$
$$+2A_0^2(431\alpha_0\alpha_4+455\alpha_2^2-431\alpha_1\alpha_3-2695\alpha_0^2\alpha_1)+2A_0(14\alpha_2\alpha_3-3\alpha_1\alpha_4)$$
$$+(28\alpha_0^4+4\alpha_0^2\alpha_3+8\alpha_0\alpha_1\alpha_2-3\alpha_3^2+4\alpha_1^3)\}.$$

Passiamo ora a calcolare a_7 ed a_8.

Allorchè si sarà trovato a_8 la equazione (2) dovendo essere verificata per $z=-7A_0^2$ ci darà il valore a_7: di modo che per completare la ricerca di tutti i coefficienti della (2) resta a calcolare il coefficiente a_8.

Evidentemente si ha

$$a_8=-7A_0^2.\prod_{s=0}^{s=6}(A_0+A_1\rho^s+A_2\rho^{4s}+A_3\rho^{2s})^2:$$

ossia posto

$$\prod_{s=0}^{s=6}(A_0+A_1\rho^s+A_2\rho^{4s}+A_3\rho^{2s})=H$$

si ha

$$a_8=-7A_0^2.H^2.$$

Dal valore di H si ricava che la sua forma ordinata rispetto ad A_0 è

$$H=A_0^7+\beta_1A_0^6+\beta_2A_0^5+\beta_3A_0^4+\beta_4A_0^3+\beta_5A_0^2+\beta_6A_0+\beta_7$$

e come inoltre H si annulla per i valori di A_0 pei quali si abbia

$$A_0 = -(A_1\rho^s + A_2\rho^{4s} + A_3\rho^{2s}) \qquad s=0.1\ldots 6$$

risulta che β_k è la somma dei prodotti a k a k delle quantità

$$y_s = A_1\rho^s + A_2\rho^{4s} + A_3\rho^{2s}. \qquad s=0\ldots 6$$

Indicando con σ_p la somma delle potenze p^{me} delle y si ha

$$\sigma_p = \sum (A_1\rho^s + A_2\rho^{4s} + A_3\rho^{2s})^p :$$

se ora dinotiamo con s_p la somma delle potenze p^{me} delle quantità $\sqrt{z_s}$ date dalle (1) si avrà chiaramente che σ_p sarà uguale alla somma dei termini di s_p quando in questa si ponga $A_0=0$, ciò che dinotiamo con

$$\sigma_p = (s_p).$$

Ora tra le s_p che sono le formole

$$s_p = A_0^p(\sqrt{-7})^p + \sum_{s=0}^{s=6}(A_0 + A_1\rho^s + A_2\rho^{4s} + A_3\rho^{2s})^p$$

si ha la relazione

$$\frac{1}{p}\frac{ds_p}{dA_0} = s_{p-1} + A_0^{p-1}\{(\sqrt{-7})^p - (\sqrt{-7})^{p-1}\}:$$

però posto in questa $A_0=0$ si avrà

$$\sigma_{p-1} = (s_{p-1}) = \frac{1}{p}\left(\frac{ds_p}{dA_0}\right).$$

Questa formola ci permette data una s_p ricavare la σ_p e tutte le σ d'ordine inferiore. Per il calcolo di H ci abbisogna conoscere tutte le σ da σ_1 a σ_7 però basterà calcolare s_7 o meglio s_8 per avere queste σ. Ora come dalla definizione di s_p si ha chiaramente che $s_{2p}=S_p$: però $s_8=S_4$: dunque dobbiamo nella S_4 già calcolata eseguire le operazioni precedenti per avere le σ.

Quindi si avrà

$$\sigma_8 = (s_8) = (S_4) = 196(\alpha_1^2 + 8\alpha_0\alpha_2) \qquad \sigma_7 = \frac{1}{8}\left(\frac{ds_8}{dA_0}\right) = 7(\alpha_4 + 98\alpha_0\alpha_1)$$

$$\sigma_6 = (s_6) = (S_3) = 42(\alpha_3 + 14\alpha_0^2) \qquad \sigma_5 = \frac{1}{6}\left(\frac{ds_6}{dA_0}\right) = \frac{1}{6}\left(\frac{dS_3}{dA_0}\right) = 70\alpha_2$$

$$\sigma_4 = (s_4) = (S_2) = 28\alpha_1 \qquad \sigma_3 = \frac{1}{4}\left(\frac{dS_2}{dA_0}\right) = 42\alpha_0 \qquad \sigma_2 = (S_1) = 0 \qquad \sigma_1 = 0.$$

In virtù di questi valori e per le formole di Newton si trova

$$H = A_0^7 + 14A_0^4\alpha_0 - 7A_0^3\alpha_1 + 14A_0^2\alpha_2 - 7A_0\alpha_3 + \alpha_4.$$

Se ora nei valori trovati per i coefficienti si pone come nella nota citata

$$2a=2A_0^4+6A_0\alpha_0+\alpha_1 \quad 8b=8A_0^6-20A_0^3\alpha_0-10A_0^2\alpha_1-10A_0\alpha_2-(\alpha_3+14\alpha_0^2)$$

$$-c=8A_0^5\alpha_0-8A_0^4\alpha_1+14A_0^3\alpha_2-7A_0^2\alpha_3-9A_0^2\alpha_0^2+A_0(\alpha_4-3\alpha_0\alpha_1)-\frac{1}{4}\alpha_1^2$$

$$-d=32A_0^5\alpha_0-16A_0^4\alpha_1+24A_0^3\alpha_2-16A_0^2\alpha_3-12A_0^2\alpha_0^2+2A_0(\alpha_4-2\alpha_0\alpha_1)-2\alpha_0\alpha_2$$

$$\gamma=32A_0^7\alpha_0-16A_0^6\alpha_1-8A_0^5\alpha_2-76A_0^4\alpha_0^2+16A_0^4\alpha_3$$

$$+2A_0^3(\alpha_4-2\alpha_0\alpha_1)+2A_0^2(9\alpha_0\alpha_2-2\alpha_1^2)+2A_0(3\alpha_0\alpha_3-2\alpha_1\alpha_2-7\alpha_0^3)+2\alpha_2^2-\alpha_1\alpha_3.$$

$$\delta=320A_0^7\alpha_2-224A_0^6\alpha_3+544A_0^6\alpha_0^2+112A_0^5\alpha_4-1664A_0^5\alpha_0\alpha_1-80A_0^4\alpha_1^2+1200A_0^4\alpha_0\alpha_2$$

$$-20A_0^3(7\alpha_0\alpha_3+68\alpha_0^3-3\alpha_1\alpha_2)+10A_0^2(44\alpha_0^2\alpha_1-5\alpha_1\alpha_3-7\alpha_2^2)$$

$$+2A_0(2\alpha_0^2\alpha_2+9\alpha_2\alpha_3-57\alpha_0\alpha_1^2+6\alpha_1\alpha_4)+(52\alpha_0\alpha_1\alpha_2+5\alpha_1^3+\frac{13}{2}\alpha_3^2-10\alpha_2\alpha_4)$$

essi assumono la forma

$$a_2=-28a \quad a_3=112b \quad a_4=-14[15a^2-29c+14d] \quad a_5=-7(a^2-c)^2$$

$$a_5=14(16ab-6\gamma) \quad a_6=-7[32b^2-12a^3+84ac-24ad+\delta]$$

mentre a_7 è dato dalla (2) quando per z si pone la radice $-7A_0^2$ e si divide per questa quantità la equazione ottenuta: cioè

$$a_7=7^7A_0^{14}+7^5a_2A_0^{10}-7^4a_3A_0^8+7^3a_4A_0^6-7^2a_3A_0^4+7a_8A_0^2-H^2.$$

La stessa equazione si potrebbe calcolare nel seguente modo.

Cercare in prima l'equazione in y le cui radici sono le

$$y_x=A_0\sqrt{-7} \quad , \quad y_s=\sqrt{z_s}=A_0+A_1\rho^s+A_2\rho^{4s}+A_3\rho^{2s}$$

la quale in virtù delle relazioni sulle somme delle radici simili, analoghe a quelle adoperate, dipenderebbe dal calcolo di S_3 e dalle derivate di questa rispetto ad A_0.

Calcolata l'equazione in y, che ha la forma

$$yf(y^2)+\varphi(y^2)=0$$

l'equazione in z si ottiene dalla

$$\varphi^2(y^2)-y^2f^2(y^2)=0$$

cambiando y^2 in z.

Milano, Marzo 1869.